

UN NUEVO ENFOQUE EN ELASTOSTATICA: ELEMENTOS DE CONTORNO P-AUTO
ADAPTABLES.

CERROLAZA, M.

Instituto de Materiales y Modelos Estructurales (IMME)
Universidad Central de Venezuela, Apartado Postal 50361
Caracas 1050-A, Venezuela.

GOMEZ-LERA, Ma. S. y ALARCON, E.

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales
Universidad Politécnica de Madrid
C/ José Gutiérrez Abascal, 2 Madrid 28006, España.

RESUMEN

Este trabajo describe la aplicación del Método de los Elementos de Contorno en su versión p-adaptable a problemas de elastostática lineal y su implementación en micro-ordenadores. Se demuestra que la técnica aquí propuesta es sumamente ventajosa en el análisis de medios continuos, consiguiéndose velocidades de convergencia mayores que las que se obtienen mediante el refinamiento tipo h. Se incluyen ejemplos ilustrativos.

PALABRAS CLAVE

Elementos de contorno, convergencia p, elastostática, indicadores de error.

1. INTRODUCCION

El Método de los Elementos de Contorno (MEC) se ha establecido como una poderosa herramienta en el análisis de recintos - 2-D y 3-D, especialmente debido a la reducción en una dimensión del dominio a estudiar (3-D \rightarrow 2-D; 2-D \rightarrow 1-D).

Como es bien conocido, el MEC (método directo) se basa en la identidad de Somigliana

$$c_{\sim} u(P) + \int_S T_{\sim}^*(P,Q) u(Q) ds(Q) = \int_S U_{\sim}^*(P,Q) t(Q) ds(Q) \quad (1.1)$$

la cual constituye una relación de reciprocidad entre el estado actual de tracciones en el contorno S , $t(Q)$, el estado de desplazamientos $u(Q)$ también en el contorno S , y una solución fundamental definida por una carga unitaria concentrada aplicada en un punto $P \in S$. Tal solución queda caracterizada por los tensores $T_{\sim}^*(P,Q)$ y $U_{\sim}^*(P,Q)$. c es un tensor geométrico que depende de la geometría de la frontera S en torno al punto P .

La interpretación de los tensores $T_{\sim}^*(P,Q)$ y $U_{\sim}^*(P,Q)$ como funciones de ponderación de tipo global, permite la interpolación de las variables incógnita $u(Q)$ y $t(Q)$ utilizando las técnicas clásicas de los métodos proyectivos. El estado de tracciones y desplazamientos sobre la frontera S del dominio es caracterizado por

$$u_{\sim}(Q) \equiv \bar{u}(Q) \quad Q \in S_u \quad (1.2)$$

$$t_{\sim}(Q) \equiv \bar{t}(Q) \quad Q \in S_t$$

$$u_{\sim}(Q) = ? \quad Q \in S_t \quad (1.3)$$

$$t_{\sim}(Q) = ? \quad Q \in S_u$$

donde S_u y S_t expresan frontera cinemática y frontera estática respectivamente. Así pues, la discretización del contorno S en elementos de frontera y la interpolación de los campos de variables desconocidas (1.3) conducen a la conocida relación matricial

$$\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{F} \quad (1.4)$$

en la cual ya se han impuesto las condiciones de contorno (1.2). $\underset{\sim}{X}$ colecciona los campos de variables desconocidas, mientras que $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{F}$ representan la ordenación de los coeficientes de influencia del problema, usualmente computados a través de técnicas de integración numérica.

La versión habitual del MEC se basa en criterios de interpolación isoparamétrica y en una discretización suficientemente fina del contorno, capaz de recoger los estados locales de los campos de variables (Brebbia et. al, 1984). Sin embargo, ha sido mostrado recientemente (Alarcón et. al, 1986; Cerrolaza et. al, 1986 ; Gómez-Lera et. al, 1987) que existen técnicas alternativas de análisis muy atractivas, mediante la utilización de la versión p-adaptable del MEC aquí propuesta.

La idea es reducir al mínimo el esfuerzo computacional y humano, controlando el grado de precisión de la solución numérica. Es necesario, pues, disponer de criterios adecuados para la estimación "a posteriori" del error global cometido. Más aún, resulta indispensable conocer "dónde" la solución viola los requerimientos de precisión previamente definidos para así poder refinar la solución en esas zonas. Con la finalidad de satisfacer este objetivo, ha sido desarrollado un criterio matemático, cuyos detalles serán discutidos en los apartados siguientes.

En el MEC p-adaptable se define inicialmente una discretización grosera, la cual se va refinando sucesivamente mediante la introducción automática de polinomios de orden superior a las funciones previas de interpolación. Así, todos los coeficientes de influencia de iteraciones anteriores se mantienen, no siendo necesario recalcularlos.

La idea es combinar las técnicas de jerarquización polinómica, típicas de los métodos de Fourier y Rayleigh-Ritz, con los procedimientos usuales de Elementos Finitos para definir funciones de interpolación locales.

Por otro lado, algunos desarrollos previos en elementos finitos (Peano, 1975; Babuska et. al, 1978; Kelly et. al, 1983) - fueron implementados en grandes ordenadores, excluyendo la posibilidad de la interacción usuario-máquina en procesos de esta índole. Sin embargo, las tecnologías recientes en micro-computadores permiten dar un enfoque distinto a procesos iterativos, - con lo cual se pueden desarrollar programas de ordenador más - "amigables" hacia el usuario y que permitan procedimientos interactivos con el ingeniero de diseño en problemas de aplicación práctica.

2. INDICADOR DE ERROR

En lo que sigue, se presentará un resumen del desarrollo matemático de los indicadores de error en elastostática, tal como se propuso inicialmente para problemas de potencial.

El lector interesado en los detalles de la formulación puede ver Cerrolaza y Alarcón (1986) y Cerrolaza, Gómez y Alarcón (1988).

Sea un dominio Ω bajo condiciones de contorno tipo Neumann, es decir, el campo de desplazamientos es desconocido en la frontera S , mientras que el campo de tracciones es conocido. En la ausencia de fuerzas volumétricas, la ecuación básica es

$$c_{\sim\sim} u_{\sim} + \int_S T_{\sim}^* u_{\sim} = \int_S U_{\sim}^* t_{\sim} \quad (2.1)$$

si t_{\sim} es dato y se trabaja con una solución interpolada \hat{u}_{\sim} , las ecuaciones de colocación son:

$$c_{\sim\sim} \hat{u}_{\sim} + \int_S T_{\sim}^* \hat{u}_{\sim} - f_{\sim} = 0 \quad (2.2)$$

$$f_{\sim} = \int_S U_{\sim}^* t_{\sim}$$

Las ecuaciones (2.2) se satisfacen sólomente en los puntos de colocación, mientras que en cualquier otro punto existirá un

residuo

$$\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{L} \underset{\sim}{\hat{u}} - \underset{\sim}{f} \quad (2.3)$$

donde $\underset{\sim}{L}$ es un operador integral que, aplicado a una función $\underset{\sim}{F}(Q)$ sobre el contorno, tiene la forma:

$$\underset{\sim}{L} \underset{\sim}{F}(P) = \underset{\sim}{c} \underset{\sim}{F}(P) + \int_S \underset{\sim}{T}^*(P, Q) \underset{\sim}{F}(Q) \quad (2.4)$$

La relación entre el error $\underset{\sim}{e}$ y el residuo $\underset{\sim}{r}$ será entonces

$$\underset{\sim}{L}(\underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{\hat{u}}) = - \underset{\sim}{r} \quad (2.5)$$

o bien

$$\underset{\sim}{L} \underset{\sim}{e} + \underset{\sim}{r} = 0 \quad (2.6)$$

donde el error $\underset{\sim}{e}$ tiene la expresión

$$\underset{\sim}{e} = \underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{\hat{u}} \quad (2.7)$$

Así, siendo $\underset{\sim}{L}$ un operador integral vectorial se puede escribir (en 2-D sin pérdida de generalidad):

$$\underset{\sim}{L} \underset{\sim}{u} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{L}_1 \underset{\sim}{u} \\ \underset{\sim}{L}_2 \underset{\sim}{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{c}_{11} \underset{\sim}{u}_1 + \int_S \underset{\sim}{T}_{11}^* \underset{\sim}{u}_1 + \int_S \underset{\sim}{T}_{12}^* \underset{\sim}{u}_2 \\ \underset{\sim}{c}_{22} \underset{\sim}{u}_2 + \int_S \underset{\sim}{T}_{21}^* \underset{\sim}{u}_1 + \int_S \underset{\sim}{T}_{22}^* \underset{\sim}{u}_2 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Se introduce ahora una medida del error global, necesaria en el desarrollo que sigue, la cual tiene la expresión:

$$\left| \left| \underset{\sim}{e} \right| \right|^2 = \int_S \underset{\sim}{e}^T \cdot \underset{\sim}{r} = - \int_S \underset{\sim}{e}^T (\underset{\sim}{L} \cdot \underset{\sim}{e}) \quad (2.9)$$

Suponiendo que la solución $\underset{\sim}{u}$ es igual a la interpolación $\underset{\sim}{\hat{u}}$ sobre toda la frontera excepto en la componente $\underset{\sim}{u}_1$ sobre el elemento k , donde un refinamiento posterior es necesario, es posible escribir:

$$u_1 \sim \hat{\hat{u}}_1 = \hat{u}_1 + a_{n+1} N_{n+1}^1 \quad (2.10)$$

donde, obviamente, el error e_1 será aproximado por:

$$e_1 \sim a_{n+1} N_{n+1}^1 \quad (2.11)$$

así que

$$\|e\|_{k_1}^2 = -a_{n+1} \int_{S_k} N_{n+1}^1 r^1 \quad (2.12)$$

pero sabiendo que

$$\begin{aligned} L_1 e_1 &= a_{n+1} L_1 N_{n+1}^1 \\ r^1 &= -a_{n+1} L_1 N_{n+1}^1 \end{aligned} \quad (2.13)$$

y usando (2.12) se obtiene:

$$\|e\|_{k_1}^2 = a_{n+1}^2 \int_{S_k} N_{n+1}^1 L_1 N_{n+1}^1 \quad (2.14)$$

comparando (2.12) y (2.14) se puede escribir que:

$$\|e\|_{k_1}^2 = \frac{\left[\int_{S_k} N_{n+1}^1 \cdot r^1 \right]^2}{\int_{S_k} N_{n+1}^1 L_1 N_{n+1}^1} \quad (2.15)$$

generalizando (2.15)

$$\|e\|_{k_1}^2 = \frac{\left[\int_{S_k} N_{n+1}^1 \cdot r^1 \right]^2}{\int_{S_k} N_{n+1}^1 L_1 N_{n+1}^1} \quad (2.16)$$

y, en consecuencia, para toda la frontera, se tiene:

$$\left\| \left\| e \right\| \right\|^2 = \sum_k \sum_l \left\| \left\| e \right\| \right\|_{kl}^2 \quad (2.17)$$

Con la ecuación (2.16) es posible evaluar la influencia - que tiene un refinamiento de la variable l en el elemento k sobre el error global (2.17). Así, comparando las contribuciones (2.16) será posible seleccionar las variables sobre aquellos - elementos que es mejor refinar, bien sea automática o interactivamente. Este es el "indicador" deseado para controlar el proceso de refinamiento.

El significado del residuo $r_{\tilde{u}}$ es claro. Con (2.5) y (2.8) se puede escribir, sobre la componente u_1 :

$$r_1 = - \left[c_{11}(u_1 - \hat{u}_1) + \int_S T_{11}^*(u_1 - \hat{u}_1) + \int_S T_{12}^*(u_2 - \hat{u}_2) \right] \quad (2.18)$$

reordenando

$$- r_1 = \left[c_{11}u + \int_S T_{11}^*u_1 + \int_S T_{12}^*u_2 \right] - c_{11}\hat{u}_1 - \int_S T_{11}^*\hat{u}_1 - \int_S T_{12}^*\hat{u}_2 \quad (2.19)$$

La contribución entre corchetes es f_1 , así que:

$$r_1 = c_{11}\hat{u}_1 + \int_S T_{11}^*\hat{u}_1 + \int_S T_{12}^*\hat{u}_2 - f_1 \quad (2.20)$$

Si la fórmula de colocación se aplica en los puntos del - contorno donde el residuo es calculado, se obtendrán valores - computados u^{COMP} , de tal forma que, mediante (2.1) y reordenando se obtiene

$$- c_{11} u_1^{\text{COMP}} = \int_S T_{11}^*\hat{u}_1 + \int_S T_{12}^*\hat{u}_2 - f_1 \quad (2.21)$$

Sustituyendo (2.21) en (2.20) se obtiene

$$r_1 = c_{11}(\hat{u}_1 - u_1^{\text{COMP}}) \quad (2.22)$$

y, generalizando:

$$r = c (\hat{u} - u^{COMP}) \quad (2.23)$$

La expresión anterior muestra cómo evaluar los residuos.

3. EL PROGRAMA ELASTA

Uno de los principales atractivos de los micros es, indudablemente, su comportamiento "amigable" hacia el usuario. Así, - el programa ELASTA fue diseñado con ese objetivo en mente para facilitar la comunicación usuario-máquina.

. El código es completamente interactivo y la selección de acciones a tomar se realiza a través de una familia de "menús" organizados jerárquicamente. El primer menú (menú principal) que el usuario encuentra es el mostrado en la figura 3.1. Este menú invoca, básicamente, al procesador numérico (última opción) y/o al preprocesador gráfico, a través de las seis primeras opciones. La llamada a cualquiera de las opciones 1 a 5, - provocará la aparición de un submenú (figura 3.2) que permite al usuario manipular convenientemente cualquier conjunto de datos residentes en memoria secundaria. La llamada a la opción 6 provocará la aparición de un submenú gráfico (figura 3.3), el - cual controla todas las acciones del preprocesador gráfico y resulta indispensable en el tratamiento de dominios 3-D.

Una vez finalizada la iteración en curso, el programa presentará el menú mostrado en la figura 3.4. Este menú es también interactivo, permitiendo la toma de acciones y sus posibles combinaciones sin establecer prioridades entre ellas. La opción - "Continuar proceso de refinamiento" conduce al cálculo de los - indicadores y estimadores propuestos en el apartado 2 y deja al usuario la decisión de continuar o no el proceso de refinamiento de la solución, mostrando la evolución del estimador global de error.

MENU PRINCIPAL: Seleccione Opcion

Datos Generales
 Coordenadas Nodales
 Conectividad de los elementos
 Restricciones Nodales
 Coordenadas Puntos Internos
 -> Pre-procesador Grafico
 Analisis P-adaptable

figura 3.1

MENU GRAFICO: Seleccione Opcion

Regreso al Menu Principal
 Rotar segun eje X
 Rotar segun eje Y
 Rotar segun eje Z
 Dibujar ejes
 -> Ampliar detalles
 Borrar la malla
 Dibujar la malla
 Numerar nodos
 Numerar elementos
 Lineas ocultas

figura 3.3

MENU DE DATOS: Seleccione Opcion

Regreso al Menu Principal
 Entrar Nuevos Datos
 -> Corregir Datos Existentes
 Imprimir Datos por Pantalla
 Imprimir Datos por Impresora

figura 3.2

MENU POST-PROCESADOR: Seleccione Opcion

Imprimir Solucion en Pantalla
 Imprimir Solucion en Impresora
 Dibujar Solucion en Pantalla
 Computar Desplazamientos Internos
 Computar Tensiones Internas
 -> Continuar Proceso de Refinamiento
 Salvar Solucion Actual
 Salir de ELASTA

figura 3.4

4. ORGANIZACION INTERNA DEL CODIGO

El programa ELASTA, especialmente diseñado para esta investigación, fue escrito en dos lenguajes: BASIC HP de alto nivel y PASCAL. Actualmente, se encuentra operativo en un micro-ordenador HP-9836.

Las rutinas que realizan las tareas más costosas y repetitivas (ej: solución sistema de ecuaciones, evaluación de integrales singulares, etc.), fueron escritas y compiladas en PASCAL, lo cual economiza una cantidad sustancial de CPU.

Las rutinas de gobierno global y flujo general fueron escritas en BASIC, aprovechando así las ventajas de los lenguajes interpretados para procesos interactivos.

El programa está estructurado, básicamente, en tres mó-

dulos: preprocesador, procesador y post procesador. Los pre y post procesador fueron brevemente descritos en el apartado 3 y, en consecuencia, aquí nos limitaremos a describir algunos detalles generales del procesador p-adaptable.

La primera etapa es definir las características topológicas remanentes de la discretización que se derivan de los datos proporcionados por el usuario. Se genera unos códigos nodales de tipo geométrico (esquinas, aristas, superficies lisas) y de condiciones de contorno. Los tres tipos de condiciones de contorno sobre elementos más usuales en la práctica profesional han sido incluidos hasta ahora:

UV → se conocen las dos componentes del desplazamiento.

ST → se conocen ambas componentes de la tensión (normal y tangencial).

VT → se conocen la tensión tangencial y el desplazamiento normal.

Así, un nodo común a dos elementos UV y ST respectivamente, será identificado internamente como "UVST", con alguna "marca" adicional referente a su geometría.

A continuación, se genera una primera solución mediante funciones de interpolación lineal sobre los elementos. En la mayoría de los casos, esta solución no es aceptable y entonces se entra en el proceso p-adaptable de refinamiento.

Así pues, será necesario refinar algunas variables sobre algunos elementos, lo cual se realiza mediante los indicadores y estimadores descritos anteriormente. El programa definirá automáticamente la ubicación de las nuevas funciones de interpolación que enriquecerán las funciones anteriores y los puntos de colocación nuevos, calculando los nuevos coeficientes de influencia y añadiéndolos a la matriz de influencia de las iteraciones anteriores.

Posteriormente, se recalcula una nueva solución. El proceso se repite hasta alcanzar el grado de precisión deseado, a criterio del usuario.

Con respecto a la evaluación de las integrales singulares, fueron tomadas algunas previsiones especiales con la finalidad de optimizar los procesos habituales de integración numérica y evitar las complicaciones numéricas habituales cuando se evalúan integrales singulares en el sentido del valor principal de Cauchy.

5. EJEMPLOS ILUSTRATIVOS Y DISCUSION DE RESULTADOS

La figura 5.1 muestra una placa cuadrada sometida a distribuciones parabólicas de tensiones, cuya solución exacta está definida por:

$$\sigma_x = -2y^2$$

$$\sigma_y = 2x^2$$

$$\tau_{xy} = 0$$

$$u(x,y) = \frac{2}{E} xy^2$$

$$v(x,y) = -\frac{2}{E} x^2 y$$

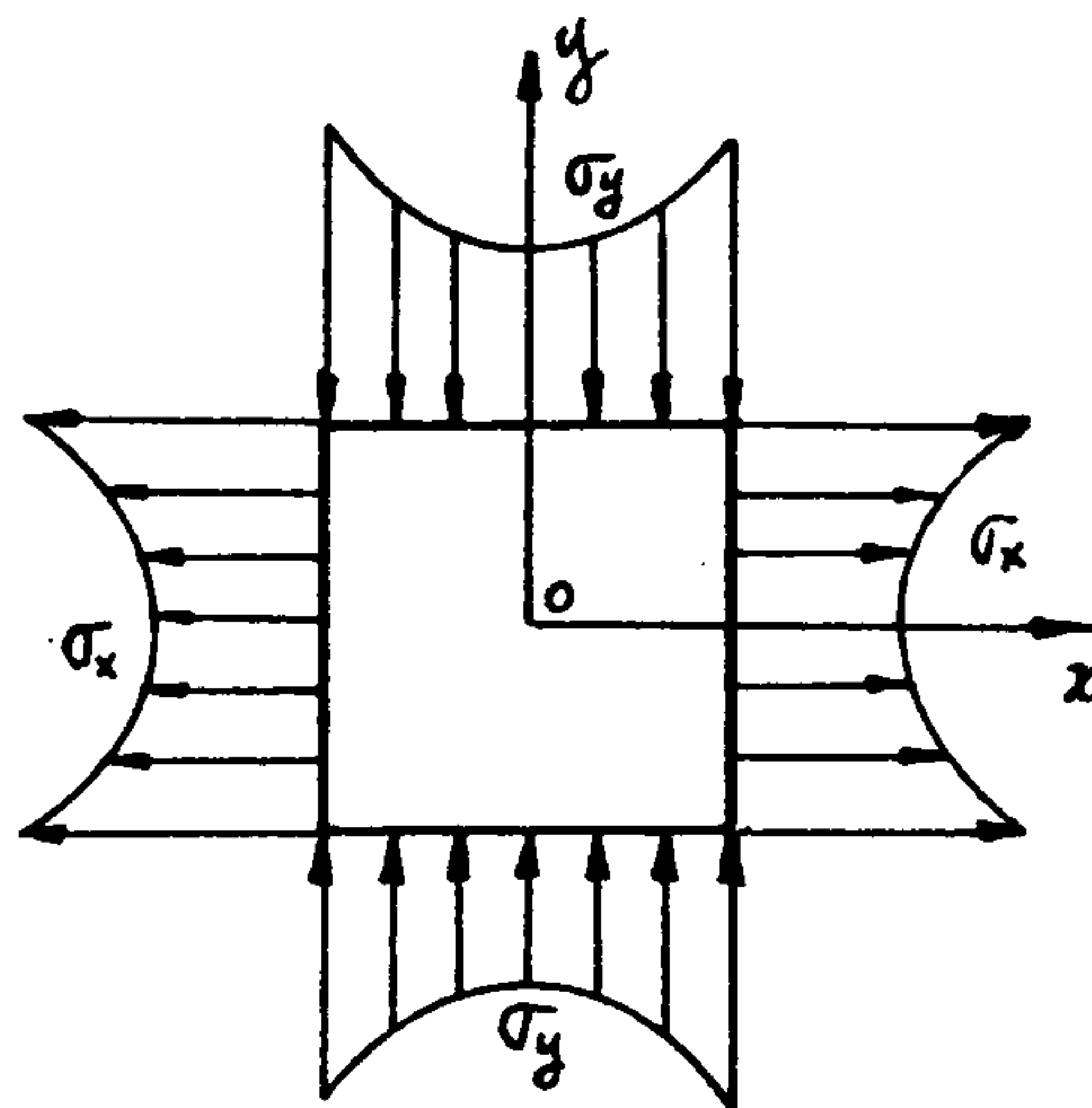


figura 5.1

Placa con tensiones parabólicas

Las figuras 5.2a y 5.2b muestran la convergencia puntual del desplazamiento horizontal (u) en el nodo 1 y la tensión horizontal en el centro de la placa, respectivamente. Obsérvese que los valores exactos de las variables son inmediatamente alcanzados con la introducción de algunas funciones parabólicas, siguiendo los criterios proporcionados por el indicador propuesto en (2.16). Sin embargo, el refinamiento isotrópico tipo-h exhibe una convergencia mucho más lenta, convergiendo asintó-

ticamente hacia los valores exactos.

La figura 5.3 compara las velocidades de convergencia globales entre los dos tipos de refinamiento (p y h). Otra vez - aquí, se consigue una velocidad de convergencia altamente superior en el refinamiento p frente al refinamiento h. El punto - identificado como p-cuadrático en la figura 5.3 representa errores numéricos en la evaluación de los residuos, no así en la solución, la cual es exacta como fue mostrado en las figuras 5.2.

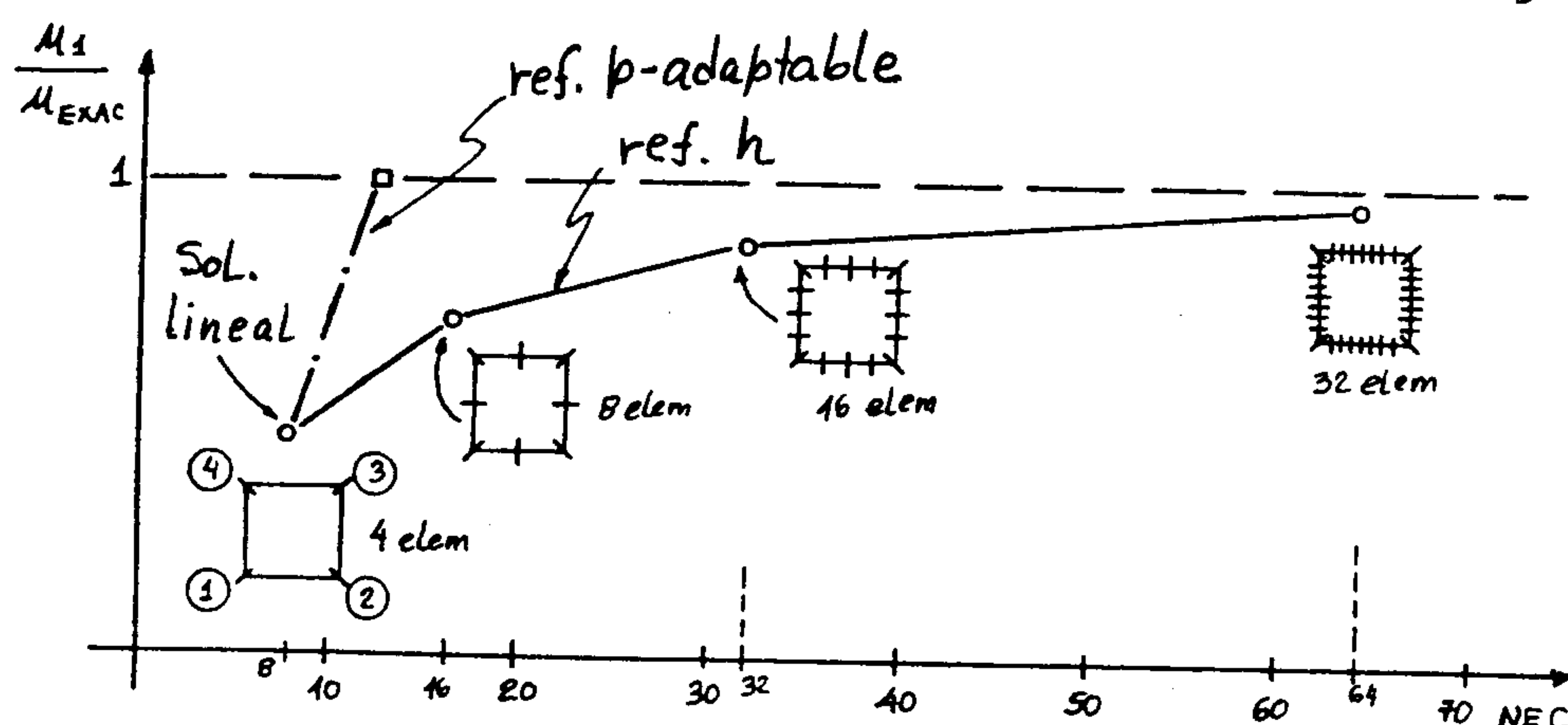


figura 5.2a

Comparación de la convergencia en el desplazamiento horizontal normalizado entre refinamientos p y h.

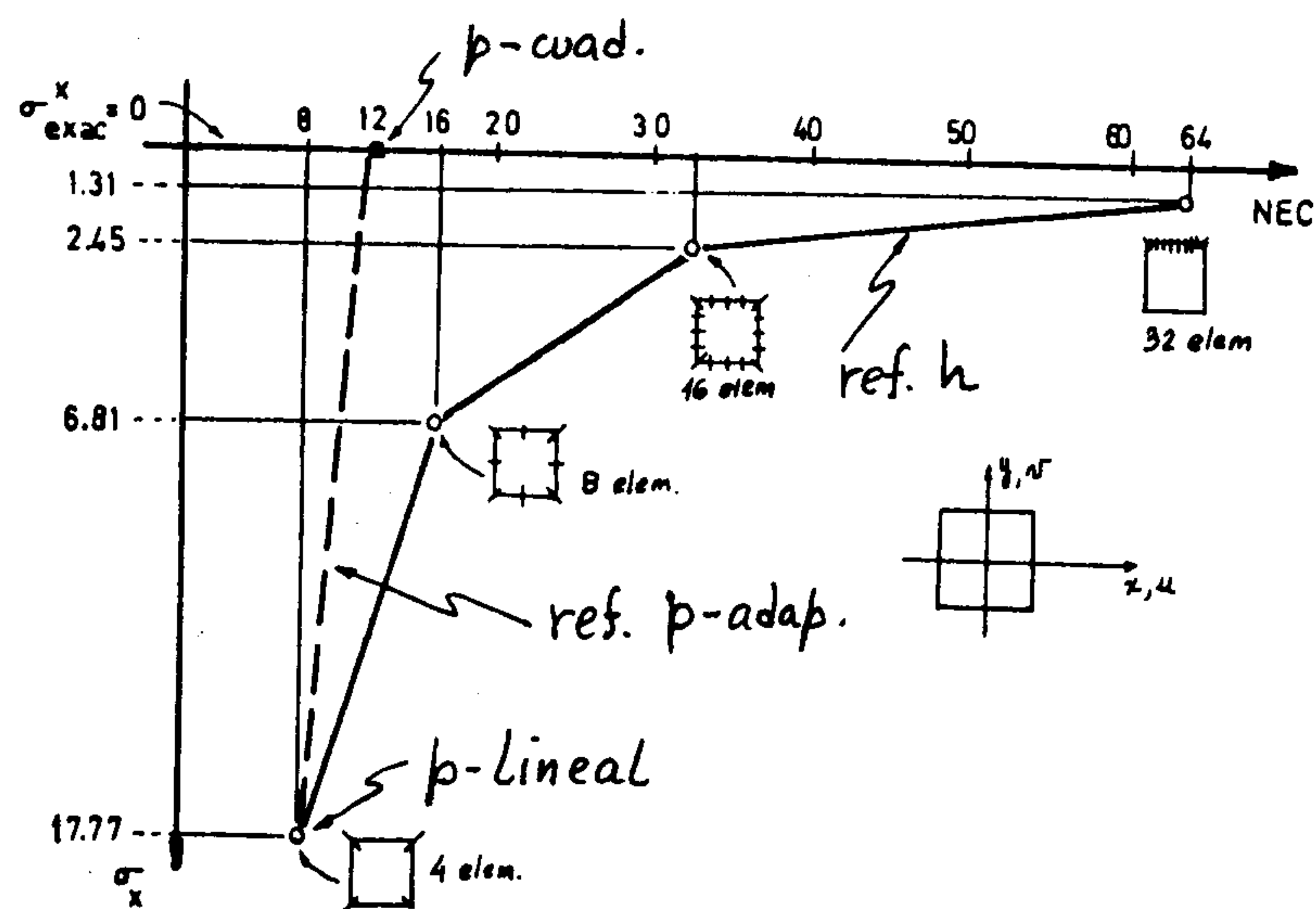


figura 5.2b

Comparación de la convergencia en la tensión horizontal en centro de la placa entre refinamientos p y h.

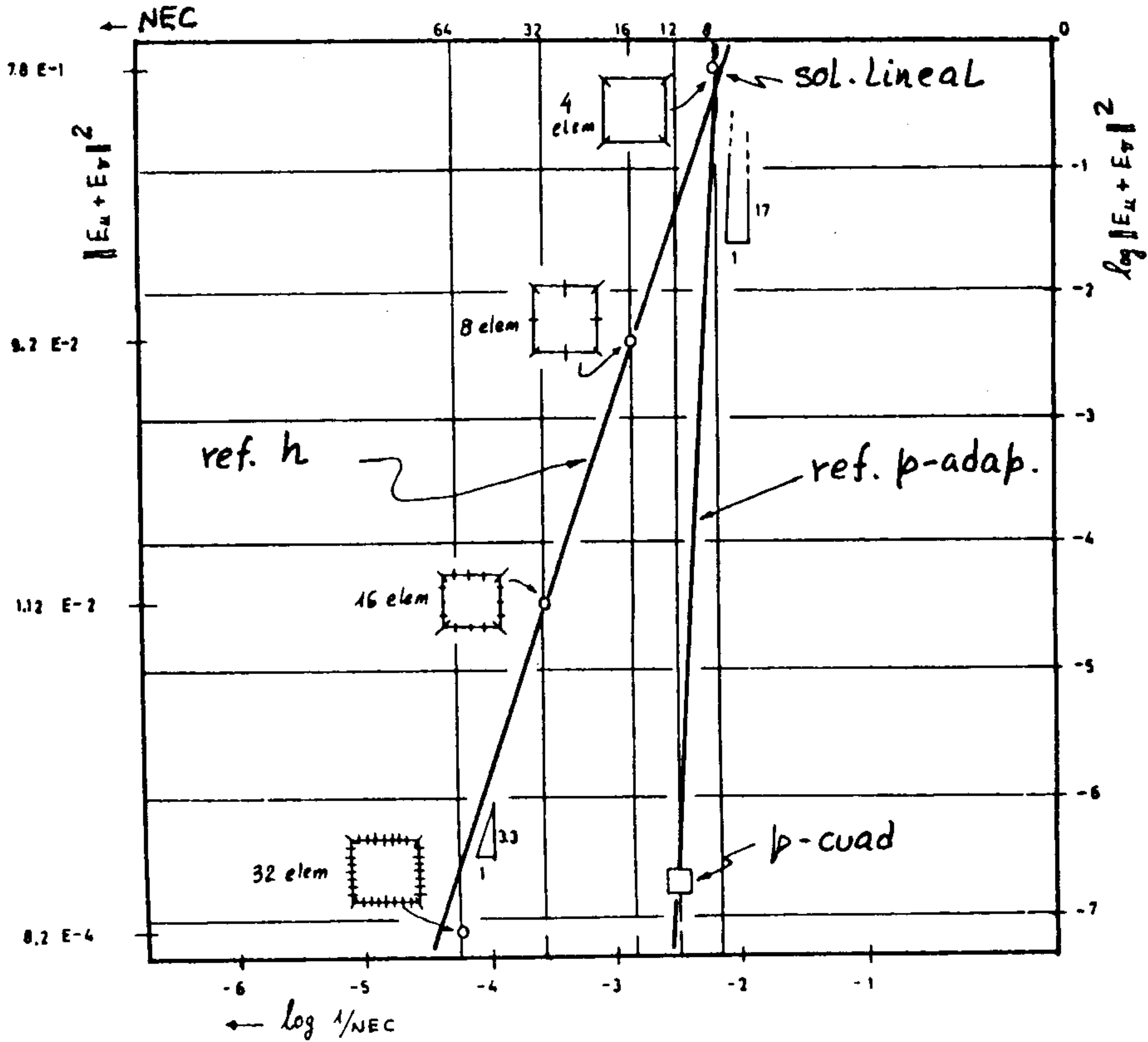


figura 5.3

Error residual VS número de ecuaciones integrales: comparación de convergencias en refinamientos p y h.

El segundo ejemplo corresponde al conocido "ensayo brasileño", es decir, un cilindro solicitado por dos cargas puntuales diametralmente opuestas. La figura 5.4 recoge la solución teórica obtenida por Hondros (1959) en línea continua, mientras - que los resultados obtenidos con refinamiento p son identificados con símbolos distintos, según sea el grado de interpolación.

Como era de esperarse, la interpolación lineal (puntos negros) produce una solución pobre, mientras que la interpolación cúbica (puntos blancos) proporciona valores satisfactorios. Nótese que solamente los elementos más grandes fueron refinados, mientras que los elementos más pequeños sólo sirven para definir el estado de solicitaciones.

La figura 5.5 también recoge la solución teórica pero ahora, la solución numérica proviene de refinamientos isotrópos tipo h.

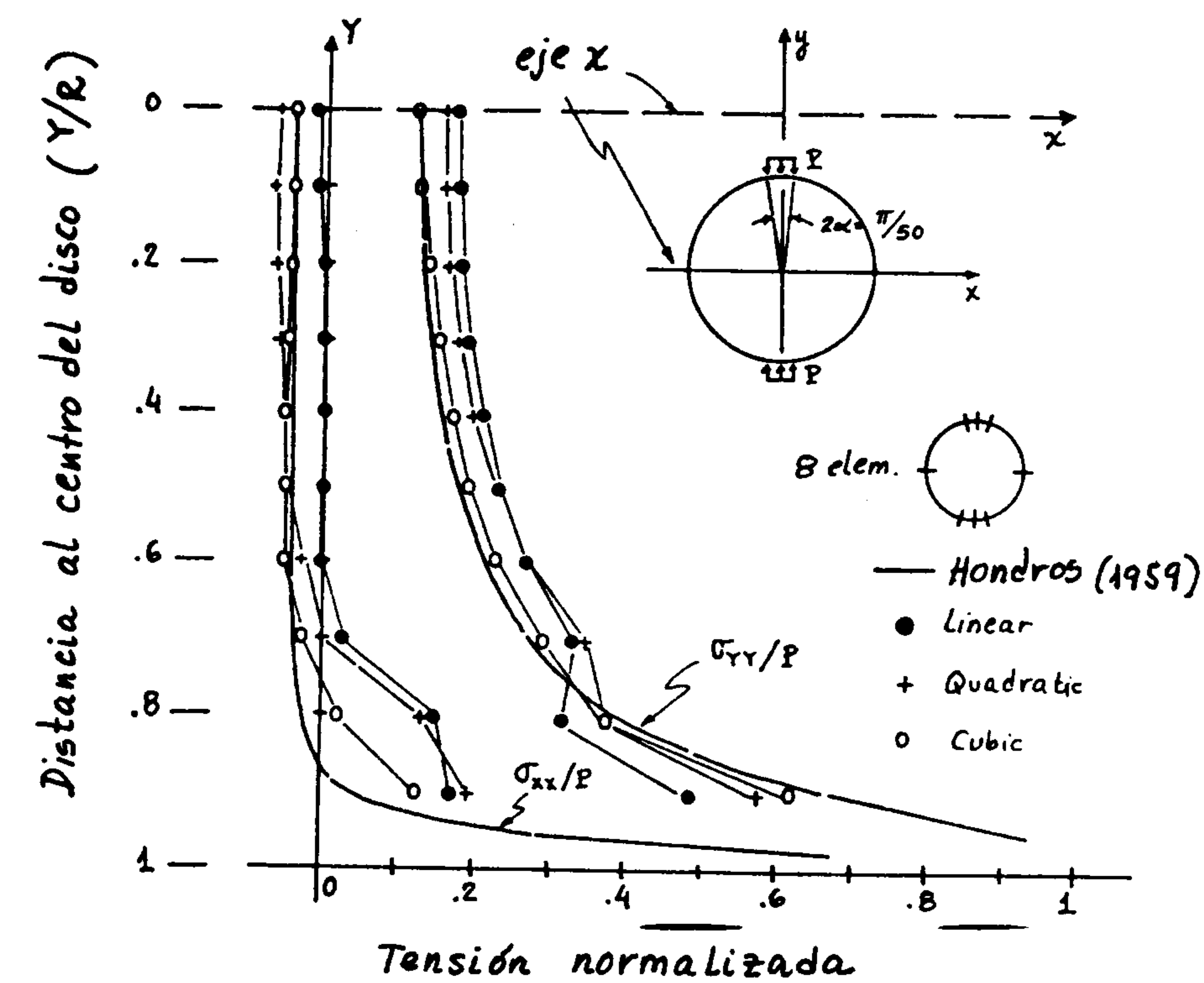


figura 5.4

Evolución de las tensiones normalizadas a lo largo del eje vertical del disco: refinamiento p.

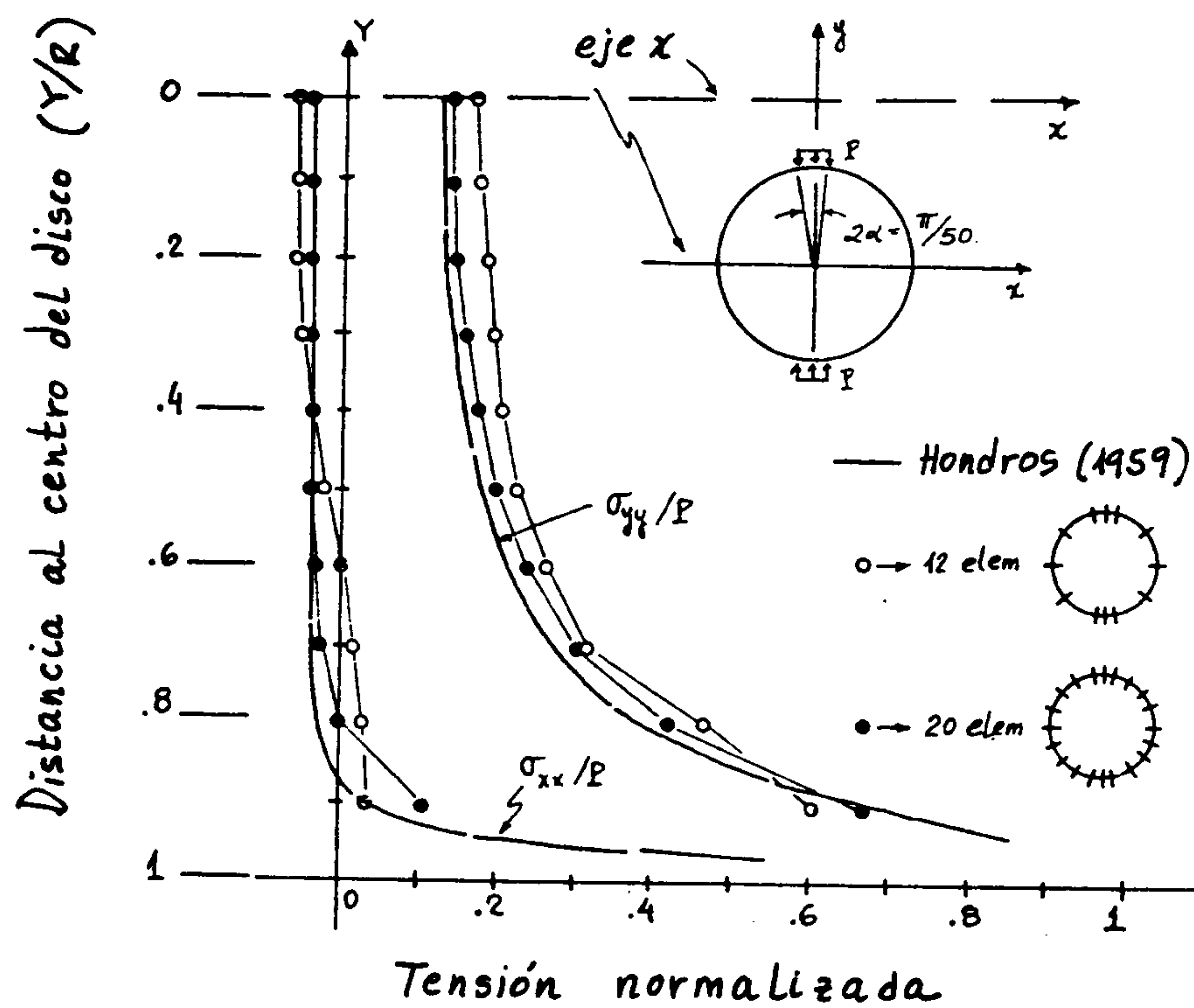


figura 5.5

Evolución de las tensiones normalizadas a lo largo del eje vertical del disco: refinamiento h.

Obsérvese que la solución con 20 elementos (puntos negros) ofrece una precisión similar a la obtenida con refinamiento p -cúbico (fig. 5.4). Sin embargo, la primera necesitó de 20 elementos y 40 ecuaciones integrales mientras que la segunda requirió sólo 8 elementos y 24 ecuaciones integrales, lo cual remarca de nuevo las ventajas derivadas de la técnica aquí propuesta: posibilidad de definir discretizaciones más sencillas y economía en esfuerzo computacional.

6. CONCLUSIONES

Se ha presentado la versión p -adaptable del método de los elementos de contorno en elastostática. Los numerosos ejemplos numéricos analizados han demostrado que la convergencia p es notablemente más rápida que la convergencia tipo h .

El programa ELASTA, especialmente desarrollado para esta investigación y orientado a micros, es una herramienta poderosa: Provee al usuario de información intermedia en el proceso iterativo y presenta un comportamiento "amigable" a través de sus varios menús y pre y post procesadores gráficos.

Los criterios de evaluación de error aquí propuestos han mostrado ser eficientes en los problemas analizados. Sin embargo, en opinión de los autores, esta es un área que aún requiere de investigación posterior, especialmente acerca del comportamiento matemático de tales criterios.

7. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido posible gracias al apoyo suministrado por la Comisión Asesora de Investigación Científica y Técnica (CAICYT, España) y el Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico (CDCH, Venezuela).

8. REFERENCIAS

- ALARCON, E., ABIA AND REVERTER, A. (1984)
On the possibility of adaptive boundary elements.
International Conf. on Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Elements Computations. Lisbon.
- ALARCON, E., AND REVERTER, A. (1986)
P-adaptive boundary elements.
Int. J. Num. Met. Eng., 23, 801-829.
- ALARCON, E., REVERTER, A. AND MOLINA, J. (1985)
Hierarchical Boundary elements.
Comp. and Struct. 20(1-3), 151-156.
- ARNOLD, D. AND WENDLAND, W. (1982)
On the asymptotic convergence of collocation methods.
Preprint 665, Th Darmstad, Dept. Mathematics, Germany.
- BABUSKA, J. (1975)
The self adaptative approach in FEM.
in Mathematics in Finite elements and applications. Academics Press, New York.
- BABUSKA, I. AND RHEINBOLDT, W. (1978)
A posteriori error estimates for the FEM
Int. J. Num. Met. Eng., 12, 1597-1616.
- BREBBIA, C., TELLES, J. AND WROBEL, I. (1984)
Boundary element techniques.
Springer Verlag, Berlin.
- CERROLAZA, M. AND ALARCON, E. (1986)
P-Adaptive Boundary elements for Three Dimensional Potential Problems.
Communications in Applied Numerical Methods, 3, 335-344.
- CERROLAZA, M. AND ALARCON, E. (1986a)
P-Adaptive BEM Approach in 3D Potential Theory.
First World Congress in Computational Mechanics. Texas. USA, Sept.

- CERROLAZA, M., GOMEZ, M., Y ALARCON, E. (1988)
Elastostatics p-adaptive Boundary Elements for Micros.
Microsoftware (to appear).
- GOMEZ-LERA, S., CERROLAZA, M. AND ALARCON, E. (1987)
Adaptive refinements in Boundary Element methods.
IX International Conf. in BEM, Stuttgart, Germany, Sept.
- HONDROS, G. (1959).
The evaluation of Poisson's ratio and the modulus of materials of a low tensile resistance by the brazilian test.
Aust. J. Appl. Sci., 10, 243-268.
- KELLY, D., GAGO, J., ZIENKIEWICZ, O. AND BABUSKA, I. (1983)
A posteriori error analysis and adaptive process in the FEM.
parts I and II, Int. J. Num. Met. Eng., 19, 1953-1619.
- PEANO, A. (1975)
Hierarchies of conforming finite elements.
PHD thesis, Washington Univ., ST. Louis.
- PEANO, A., RICCIONI, AND L. SARDELLA. (1983).
Adaptative finite elements models.
Applied Numerical modeling, Ed. E. Alarcón, Pentech Press.
Londres.
- RANK, E. (1985)
A posteriori-fehlerabschätzungen und adaptive Netzverfeinerung für Finite-Element-und Randintegralelement-Methoden.
PHd thesis, Technische Univ. München, Germany.
- SZABO, P., BASU, K. AND ROSOW, M.P. (1978)
Adaptive finite element based on p-convergence.
NASA conference. Pub. 2059, pp. 43-50.